円周率を求める

江東区立水神小学校　第6学年　坂下 伊鞠

1、研究の動機

2022年6月8日(米国時間)にインターネット関連会社に勤める日本人女性技術者・岩尾エマさんが、100兆桁の円周率を計算し、世界記録を更新したというニュースを見た。この時、私は、円周率というものに興味を抱き、鳴海風　著「円周率の謎を追う　江戸の天才数学者・関孝和の挑戦」、ベックマン著「πの歴史」の本を読んでみた。円周率というものが益々不思議に思え、インターネットで更に円周率について調べてみると、確率を用いて円周率を求める方法(ビュフォンの針実験)がある事を知った。一見関係の薄そうな確率の世界から円周率が求められるという事で、ビュフォンの針実験について調べたが、過去にこの実験をした人たちの実験時の詳細な条件を知ることができなかった。私は、条件によってどのように円周率算出の結果が変わるか興味を抱き、ビュフォンの針の実験の有効な手段探し実験と円周率を求めることにした。

2、実験


写真1. 使用した紙の円

(1)円周の長さから円周率を算出

円の円周から円周率を割り出し、円周率が3.14に近似するか確認した。


写真2. (1)実験時の様子

【方法】

紙を色々な半径の円で切り、
切った円の円周をタコ糸で図り、
タコ糸の長さを定規で測る。測った円周から下記式を使って円周率を求めた。

円周率＝(円周)÷(2×半径)

(2)ビュフォンの針の実験

18 世紀にビュフォン（G.L.L.vonBuffon)によって考えられた確率論に関する問題である。
平面上に等間隔で平行線を引き、その上に針を落とした時、線と針が交差する確率を円周率を使って表すことができる。
(但し、(平行線の間隔)≧(針の長さ)とする。)

$$\text{針が線と交差する確率} = \frac{2\times(\text{針の長さ})}{(\text{円周率})\times(\text{平行線の間隔})}$$

この式より、円周率を求めることができる。

$$\text{円周率} = \frac{2\times(\text{針の長さ})}{(\text{針が線と交差する確率})\times(\text{平行線の間隔})}$$

【準備したもの】

・針として下記を使用
　＊爪楊枝(長さ6.5cm)
　＊串(長さ18cm)
　＊丸竹箸(長さ20cm)
・模造紙


写真3. (2)実験時の様子

【方法】

模造紙上に等間隔で平行線を引き、針を投げ、平行線と交差している針の本数を数え、円周率を割り出した。

◆実験1◆針の投げ方による影響を調べる

針は、できる限りランダムになるように投げることが条件であるので、投げ方により結果に違いが出るかを調べた。

【方法】

手にそれぞれ20本、40本、50本の針(爪楊枝)を握り、平行線を引いた模造紙に2種類の投げ方で針を投げた。各実験で投げる総本数は2000本。

①上から落とす方法(写真4.)
掌を下に向け針を握り、一気に手を広げ針を落とした。
②下から上に向かって投げる方法(写真5.)
掌を上に向け針を握り、上方に向けて針を一気に投げた。


写真4. 方法①の針の投げ方


写真5. 方法②の針の投げ方

◆実験2◆ 一度に投げる針の本数による違いを調べる

【方法】

一度に投げる針(爪楊枝)の本数を20本、40本、50本と変え、実験をした。(各実験で投げる針の総本数は2000本で、投げ方は実験1の方法①)

◆実験3◆平行線の間隔の違いによる影響を調べる

【方法】

平行線の間隔を針(爪楊枝)の1倍(6.5cm)、1.2倍(7.8cm)、2倍(13cm)、3倍(19.5cm)と変え、実験した。(各実験で投げる針の総本数は2000本で、一度に投げる本数は20本、投げ方は実験1の方法①)

◆実験4◆針の長さの違いによる影響を調べる

【方法】

長さの違う針として爪楊枝(6.5cm)と串(18cm)と丸竹箸(20cm)を使い実験する。


写真6. 投げる針の種類

◆円周率を求める◆

【方法】

実験1～4の結果を踏まえて、ビュフォンの針実験から円周率を求める上でより良い方法を選択し、針を投げる本数を2360本に増やし円周率を求めた。

3、予想

(2)のビュフォンの針の実験については、過去に実験した人たちの結果を見ると相対誤差が2%以下であることから、今回も同様の結果を得ることができると予想。(1)の実験については、糸で円周を測るときに誤差がでると予測できるため、相対誤差は(2)の実験よりも大きくなると予想。

4、結果と考察

(1)円周の長さから円周率を算出

〈結果〉

算出した円周率の平均は、3.2039　となった。円周率の理論値との相対誤差の平均は 1.99% となった。

〈考察〉

円周率は、3<円周率<3.5の範囲にある定数のようだと推測することができる。
古代バビロニア人が紀元前3000年頃に円周率として3.125 を使っていたと考えられているので、今回の実験の誤差は大きいものと考えられる。

(2)ビュフォンの針の実験

◆実験1◆針の投げ方による影響

〈結果〉

表2.の黄色とピンクで色付けした箇所を比較すると分かるように、12回の比較実験において、方法①の方が8回絶対誤差が方法②よりも小さくなった。

〈考察〉

針の投げ方については、『方法①の方が良い』と判断できる。

表1. 円周の長さから円周率を算出した結果

半径(cm)	測定した円周(cm)	計測した円周から求めた円周率値
2.0	13.0	3.25
	13.1	3.275
	12.7	3.175
2.5	16.8	3.36
	16.6	3.32
	17	3.4
3.0	19.4	3.233
	19.2	3.2
	19.2	3.2
4.0	25.1	3.138
	24.6	3.075
	25.4	3.175
4.5	28.6	3.178
	29.0	3.222
	28.5	3.167
5.0	31.9	3.19
	32.0	3.2
	31.7	3.17
6.0	38.8	3.233
	38.4	3.2
	38.0	3.167
6.5	41.1	3.162
	42.0	3.231
	41.5	3.192
7.0	44.3	3.164
	44.7	3.193
	44.4	3.171
8.0	49.9	3.119
	51.4	3.213
	51.4	3.213
9.0	57.6	3.2
	57.8	3.213
	57.2	3.178
10.0	63.5	3.175
	63.9	3.195
	64.0	3.2

表2. 実験1及び実験2の結果

平行線の間隔(cm)	1回に投げる本数(本)	投げた回数(回)	投げ方	円周率	正確な円周率値との絶対誤差
6.5	20	50	方法①	3.165	0.023
			方法②	3.263	0.121
	40	25	方法①	3.2	0.058
			方法②	2.082	0.06
	50	20	方法①	2.92	0.222
			方法②	3.252	0.11
7.8	20	50	方法①	2.955	0.187
			方法②	2.825	0.317
	40	25	方法①	2.801	0.34
			方法②	3.552	0.411
	50	20	方法①	2.815	0.326
			方法②	2.755	0.387
13	20	50	方法①	3.215	0.074
			方法②	2.941	0.2
	40	25	方法①	2.54	0.602
			方法②	2.747	0.394
	50	20	方法①	2.52	0.621
			方法②	2.674	0.468
19.5	20	50	方法①	3.175	0.033
			方法②	2.8	0.34
	40	25	方法①	2.963	0.179
			方法②	3.350	0.208
	50	20	方法①	2.976	0.165
			方法②	3.345	0.203

◆実験2◆ 一度に投げる針の本数による違いを調べる

〈結果〉

各平行線間隔の実験の中で最も絶対誤差が小さいものを表2.において緑色に色付けした。同じ平行線間隔で一度に投げる回数で結果を比較すると、いずれの場合も、20本投げた時が比較的絶対誤差が小さかった。

〈考察〉

一度に投げる本数は少ない方が良いということが分かった。

これは、針を20本ずつ、50本ずつ投げた時の写真７と写真８を比較すると分かるが、一度に投げる本数が多いと、模造紙に針が落下する際に針どうしが干渉し合ったことによりばらつきが抑えられ、まとまって落下する傾向があった。

これにより絶対誤差が大きくなっていた可能性が示唆された。

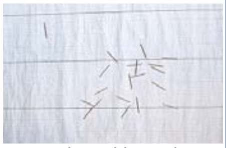


写真7. 針20本

写真8. 針50本

◆実験3◆平行線の間隔の違いによる影響

〈結果〉

表3.に記した。

〈考察〉

この結果から、平行線間隔の違いによる影響はほぼないと分かった。

表3. 実験3の結果

平行線の間隔(cm)	1回に投げる本数(本)	投げた回数(回)	円周率	正確な円周率値との絶対誤差
6.5(1倍)	20本	100	3.115	0.026
7.8(1.2倍)	20本	100	2.960	0.181
13(2倍)	20本	100	3.215	0.074
19.5(3倍)	20本	100	3.175	0.033

◆実験4◆針の長さの違いによる影響

表4. 実験4の結果

針の長さ(cm)	平行線間隔	1回に投げる本数(本)	投げた回数(回)	円周率	正確な円周率値との絶対誤差
6.5	6.5	20	100	3.115	0.026
18	18	20	100	3.157	0.015
20	20	20	100	3.122	0.02

〈結果〉

表4.に記した。

〈考察〉

この結果から、針の長さの違いによる影響はほぼないと判断できた。

◆円周率を求める◆

実験1～4の結果より、

・針の投げ方は「方法①」

・一度に投げる針の本数は20本

・針として爪楊枝を使用

・平行線間隔は、爪楊枝と同じ長さ6.5cm

の条件で、円周率を求めた。

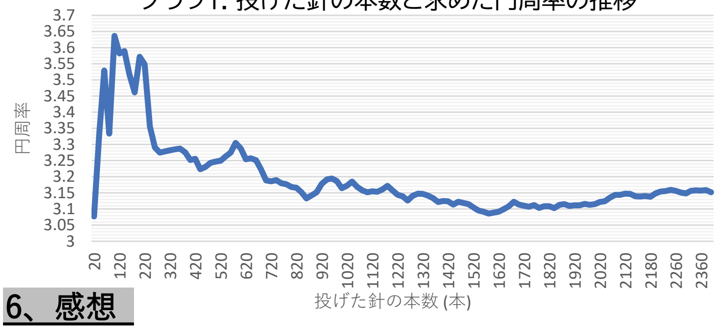
〈結果〉

投げる本数を増やすとグラフ1、の様な値を取りながら一定値に近づくことを確認でき、2360本投げた結果、円周率は、3.1518 を得ることができた。

5、結論

円周率の理論値との絶対誤差は、0.0102となり、相対誤差は、0.326％となった。 今回の誤差は一見すると小さい値に見えるが、円周率は色々な分野で使われるもので、僅かな誤差でも結果として大きな誤差を生むことになると言える。

グラフ1. 投げた針の本数と求めた円周率の推移



6、感想

人力で実験し求めるのではなく、計算やコンピュータを使い、より正確な円周率を求めることが必要だと実感した。 NASAやJAXAでは小数点以下15桁を利用している。もっと多くの桁数を使い計算をしていると思っていたが、「『値が正確か』ではなく『円周率の桁数を減らしたことで、どれだけの誤差が生じたか』が重要」ということで15桁で計算しているようだ。何十億kmという規模の距離からロケットを地球に帰還させるには、小数点以下2桁では相対誤差0.05％になりやはり大きく、15桁は必要であることは納得がいく。

現在のギネス記録である小数点以下100兆桁の円周率をどのくらいで読み切れるかを計算してみたが、1秒間に5つの数字を読めるとすると読みきるのに約63.4万年かかることになる。とても読み切れる年数ではない桁数まで計算が進んでいるが、終わりのない円周率がコンピュータの性能のベンチマークになっているのも面白いと感じた。

7、参考資料

●数学の面白いこと・役に立つことをまとめたサイト
https://analytics-notty.tech/interesting-thing-about-pi/
●円周率πが現われる世界－ビュフォンの針の問題－(ニッセイ基礎研究所)
https://www.nli-research.co.jp/report/detail/id=56991?site=nli
●How Many Decimals of Pi Do We Really Need?
(By NASA/JPL Edu)　NASA　October 24, 2022
https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need/
●Google Cloud 上で 100 兆桁の円周率を計算　(Google Cloud　2022年6月9日)
https://cloud.google.com/blog/ja/products/compute/calculating-100-trillion-digits-of-pi-on-google-cloud
●ビュフォンの針　(おいしい数学)
https://hiraocafe.com/note/buffon.html
●ビュフォンの針の問題と確率の導出 (学びTimes)
https://manabitimes.jp/math/1065
●鳴海風 著「円周率の謎を追う 江戸の天才数学者･関孝和の挑戦」(くもん出版) 2016年
●ベックマン著、田尾陽一/清水韶光 訳「πの歴史」(ちくま学芸文庫) 2006年